発散のないmodel　の試作(9)

著者	古尾谷　泉
出版者	法政大学多摩研究報告編集委員会
雑誌名	法政大学多摩研究報告
巻	22
ページ	63-73
発行年	2007-03-30
URL	http://hdl.handle.net/10114/1550

発散のないmodelの試作（Ⅸ）

古尾谷　泉

An attempt toward a non-divergent model (IX)

Izumi FURUOYA

1. はじめに

現在の場の理論には“発散の困難”といわれる欠陥が存在する。我々は独自の視点から発散のないmodel作りを試みてきた。この論文では、まず、現在の理論にはどのような論理上の矛盾点があるのか、について議論する。次に、我々のmodel spaceにDirac方程式を拡張する。我々のmodelでは電荷不変性の要請をおくが、素粒子の電荷密度はfermionでないとうまく定義できない。そのためにも、我々のmodel spaceにおけるDirac方程式を導出する必要がある。

第2章で、現在の理論の矛盾点を論じる。第3章で、我々のmodel spaceにDirec方程式を拡張する。第4章で、新しいDirac方程式は我々の電荷不変性の要請を満たすことを示す。

2. 現在の理論の問題点

電子はDirac方程式で記述される。また、電磁波―光子―はMaxwell方程式で記述される。これらの粒子は粒子間の相互作用を考えないとき、“自由粒子”とか“裸の粒子”などと呼ばれる。裸の粒子は測定にかかることはない。裸の粒子は不確定性原理によって許される短い時間内に仮想的に発生した粒子を常にまとっているが、我々が観測できるのはその衣を着た粒子の全体像であり、裸の粒子が単独で測定にかかることはない。我々は裸の粒子とそのような量子効果とを分離する実験的手段をもってはいない。

光子は常に仮想的に電子陽電子対に変身するが、裸の電子の電荷はこの対生成―真空偏極―の結果その値を変える。外場が弱くかつゆるやかである場合には、そのような外場によってひきおこされる偏極は摂動計算で近似的に求めることができる。その結果、真空の電荷ならびに電流の変化は、それぞれ

$$\rho' = \rho^{(0)} + \frac{e^2}{\hbar}\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{\hbar^2}{m^2}\Box^2\right)^n \Phi_{ext} \tag{1}$$

および

$$\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i}^{(0)} + \frac{e^2}{\hbar}\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{\hbar^2}{m^2}\Box^2\right)^n \Phi_{ext} \tag{2}$$

であたえられる[1)]。ここで、$\rho^{(0)}$ および $\boldsymbol{i}^{(0)}$ は相互作用のない裸の電子の電荷と電流である。上式中、c_n は定数であるが、c_0 は発散積分であり、この c_0 を引き去った残りの項は有限であって測定にかかる物理量と見なされる。Eq.(1)を

$$\Box^2 \Phi_{ext} + 4\pi\left(\frac{e^2}{\hbar}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\Box^2\right)^n \Box^2 \Phi_{ext} = -4\pi\rho_{ext} \tag{3}$$

とかいてみる。Eq.(3)の左辺の第 2 項は Maxwell 理論からの高階微分係数によるずれをあらわす。このことは物理的には Coulomb の法則からのずれが存在することを意味し、この Coulomb energy のずれによるスペクトル線のずれを示唆している。この予見は Lamb shift の発見によってみごとに確かめられた。第一近似において Maxwell 理論の線型性は保たれているが、しかし、外場が強くなると線型性は破れてしまうであろう。外場が強いときには、光子の propagator のすっきりした形を求めることは困難となり、その具体的な形は求められていない[2)]。

以後、裸の電子や光子をあらわす Dirac 方程式や Maxwell の方程式等の基礎方程式とそれらの粒子間の相互作用とから組み立てられた理論を基礎理論と呼ぶことにしよう。古典論であれば、基礎理論の枠内で物理量の基本的な単位を決定し、裸の粒子の質量や電荷等の値も実験により決定可能であろう。そして、そのようにして組み立てられた基礎理論の枠内で、諸々の dynamical な問題を扱うことが可能となろう。しかし、量子論では事状が異なるのである。量子論では、裸の電子の質量や電荷の値は実験で決定することは出来ない。実際に測定にかかるのは、それらの量に量子効果の寄与が加わった全体像である。

Eq.(3)の左辺の第 2 項は仮想的な電子陽電子の対生成消滅による量子効果から生ずる頃である。古典論であれば、このような項は生じないから、Eq.(3)は Maxwell の方程式 $\Box^2\Phi = -4\pi\rho$ となり、Maxwell 方程式が現実の意味をもつ、しかし、<u>量子論では Eq.(3)の左辺第 2 項は無視できない。この項は、いつでもいかなるところでも、常について廻り、けっして消し去ることは出来ないのである</u>。しかも、この頃は電子陽電子対生成から生じた dynamical な現象をあらわす項であり、本来ならば、基礎理論の枠内で計算されるべき効果である。古典論であれば、これらの dynamical な現象は基礎方程式を使って計算することが出来よう。しかし、量子論では現実的な方程式は純粋な Maxwell の方程式ではなく、対生成による dynamical な効果を既に含んでしまっている Eq.(3)の方程式なのである。かといって、Eq.(3)を理論の基礎

方程式に採用することは許されまい。なぜならば、Eq.(3)には基礎理論でもって計算されるべき dynamical な量子効果が、既に含まれてしまっているからである。一般には、Eq.(3)の第２項の量子効果の寄与は小さいが、しかしこの寄与を消去することは不可能なのである。非常に精度のよい実験であれば、その測定値には量子効果の影響は含まれていて、この測定値はクーロンの法則に合わないはずである。したがって、量子効果の大きさを△とすると、クーロンの法則は△の大きさの誤差のある近似の法則ということになろう。例えば、精度のよい測定値を用いて、クーロンの法則を適用して、基本的な物理量の単位を決定しようとすると、その単位には△の大きさの誤差があることになる。これが古典力学であれば、量子効果は現れないから、クーロンの法則が厳密に成立して、基本単位は正確にもとめられるであろう。このようにして、現在の理論は、△の大きさの誤差のある理論でもって、△の大きさの dynamical な量子効果の計算をおこなっていることになりはしないか。

量子論では、Dirac 方程式や Maxwell 方程式のような純粋な形の方程式は存在しないといってよかろう。実際に存在するのは、Eq.(3)のような量子効果をすでに含んだ方程式なのである。言葉をかえていえば、量子論では従来の純粋な形の Dirac 方程式や Maxwell 方程式は量子効果の影にかくれてしまっていて見えないのである。仮想的な対生成のような量子効果は dynamical な現象であるから、基礎理論の枠内で計算されるべきであるが、しかし、この計算に用いるべき基礎理論には、常に、この dynamical な量子効果がまとわりついてしまっていて、その真の枠組を取り出すことは出来ないのである。このように考えてくると、現在の理論には、明らかに、その内部に理論上の矛盾があると考えることが出来よう。これらの議論から、量子論の基礎理論には量子効果の大きさ程度の不確定さ、あいまいさ、があるといってよかろう。

ではそのあいまいさはどの程度と考えたらよいであろうか。現在の量子電磁力学における最もすばらしい成果は電子の異常磁気能率に関するものであろう。電子の異常磁気能率の理論値と実験値をあげておく[3)]。

$$g_{theor} = 2\,(1 + 0.001159652140)$$

$$g_{exp} = 2\,(1 + 0.001159652193)$$

両者は小数点以下 10 桁迄一致しており、これは量子電磁力学のすばらしい成果といえよう。
10 桁より先は weak interaction の領域であり、Hadron の関与する世界である。

量子論では、基礎理論は量子効果の背後にかくれて見えないのであるから、我々はこの 10 桁の一致を乱さない範囲内で、基礎理論を修正することを試みよう。我々の新しい基礎理論においては、上記のあいまいさの制約内で以下の要請をおく。

“我々の新しい基礎理論において、古典論の意味で電子の電荷の値は相互作用によって変わってはならない恒常的不変量である”。

ここで、注意すべきは、上記の要請における電荷とは、我々の新しい基礎理論における電荷であって、実際に測定にかかる仮想的な対生成の衣を着た電荷のことではない。当然のことながら、我々の基礎理論においても、裸の粒子は直接見ることは出来ないからである。

次に、現在の理論で電子の電荷は相互作用の有る無しによって、どのように異なるかをみよう。このことは、Eq.(1)とEq.(2)とから明らかなことではあるが、いわんとしていることを明瞭にするために、話を初等的なことがらから始めよう。以下はSchiffの量子力学の教科書による。

最初に、相互作用の存在しない場合の電子の電荷密度と電流密度とを求めよう。相互作用のない場合のDirac方程式は、

$$i(\partial_t\varphi)-i\alpha_i(\partial_i\varphi)-m\beta\varphi=0, \tag{4}$$

である。この式に共軛な式は、α_i と β はhermitianであるから、

$$-i(\partial_t\varphi^*)+i(\partial_i\varphi^*)\alpha_i-\varphi^*\beta m=0 \tag{5}$$

となる。Eq.(4)の左辺より φ^* をかけ、また、Eq.(5)の右辺より φ をかけて引き算すると連続の式

$$\partial_t\rho^{(0)}=\partial_i j_i^{(0)} \tag{6}$$

をうる。ここで、$\rho^{(0)}$ と $j_i^{(0)}$ は、それぞれ、相互作用のない場合の電子の電荷密度と電流密度とである。これらは

$$\begin{cases}\rho^{(0)}=e\varphi^*\varphi\\ j_i^{(0)}=e\varphi^*\alpha_i\varphi\end{cases} \tag{7}$$

で定義される。

次に、電子が電磁場と相互作用しているときの電子の電荷密度と電流密度とを求めよう。電磁場の4元vectorを $(\phi,\ A_i)$ とすると、Dirac方程式は

$$(i\partial_t-e\phi)\Phi-i\alpha_i(\partial_i-eA_i)\Phi-\beta m\Phi=0, \tag{8}$$

である。Eq.(8)の共軛をとると

$$-i\Phi^*(\overleftarrow{\partial}_t-e\phi)+i\Phi^*(\overleftarrow{\partial}_i-eA_i)-\Phi^*\beta m=0, \tag{9}$$

となる。自由電子のときと同様にして、Eq.(8)に左から Φ^* をかけ、また、Eq.(9)の右から Φ をかけ、引き算すると

$$\partial_t\rho=\partial_i j_i, \tag{10}$$

を得る。ここで、$(\rho\quad j_i)$ は電磁場が存在する場合の電子の電荷密度と電流密度とである。

すなわち、

$$\begin{cases} \rho = e\Phi^{*}\Phi, \\ j_i = e\Phi^{*}\alpha_i\Phi, \end{cases} \tag{11}$$

である。Eq.(7)とEq.(11)とから、一般には、$\Phi \fallingdotseq \varphi$ であるから、相互作用のある場合の電子の電荷密度と自由電子のそれとは明らかに異なる。すなわち、

$$\rho \fallingdotseq \rho^{(0)} \tag{12}$$

である。Eq.(8)から、電磁場 $(\phi \quad A_i)$ の強さが変わると、Φ が変わるから、それにつれて ρ の値も変わることがわかる。このようにして、現在の理論では、相互作用の強さが変わると電子の電荷密度の値も変わることがわかる。

ここで注意しておくが、我々は古典論として話を進めて来たが、実は、ρ を摂動計算で求めると、ρ の中には量子効果は含まれていて、これがEq.(1)式である。

3. 我々の model space における Dirac 方程式

我々の model space へ Dirac 方程式を拡張しよう。その拡張の仕方には任意性があり、一意ではない。ここでは最も自然な形の拡張を試みる。

我々の model space における無限小距離は

$$-ds^2 = d\xi^2 + e^{-\frac{2\xi}{a}}(-dt^2 + d\boldsymbol{x}^2), \tag{13}$$

である。ここで、a は我々の model space の曲率半径であって、その値は、現時点では未知であるが、十分に大きく、第2章で述べた電子の異常磁気能率の値を乱さないものとする。ξ は新しい parameter であって、t と $\boldsymbol{x}$ の関数であるべき変数であるが、ここでは、ξ、t、$\boldsymbol{x}$ は互いに独立な変数とみなして議論を進めて行くことにする。

$$E = m\frac{dt}{ds},\ \ \boldsymbol{p} = m\frac{d\boldsymbol{x}}{ds} \text{ および } p_\xi = m\frac{d\xi}{ds}, \tag{14}$$

とおけば、Eq.(13)より

$$E^2 = \boldsymbol{p}^2 + e^{\frac{2\xi}{a}}(m^2 + p_\xi^2), \tag{15}$$

となる。次に、Eq.(15)を $(\boldsymbol{p},\ p_\xi \quad m)$ の線形和の2乗の形に書きかえる。そのためには、

$$\begin{aligned} E^2 &= (\alpha_i p_i + e^{\frac{\xi}{a}}(\beta m + \alpha_\xi p_\xi))^2 \\ &= \alpha_i^2 p_i^2 + \beta^2 e^{\frac{2\xi}{a}} m^2 + \alpha_\xi^2 e^{\frac{2\xi}{a}} p_\xi^2 + (\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i)p_i p_j \\ &+ e^{\frac{\xi}{a}}(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)mp_i + e^{\frac{\xi}{a}}(\alpha_i\alpha_\xi + \alpha_\xi\alpha_i)p_i p_\xi + e^{\frac{2\xi}{a}}(\beta\alpha_\xi + \alpha_\xi\beta)mp_\xi \end{aligned} \tag{16}$$

但し、$i \neq j$ である、として

$$\begin{cases} \alpha_i^2 = \beta^2 = \alpha_\xi^2 = 1 \\ \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = \alpha_i\alpha_\xi + \alpha_\xi\alpha_i = \beta\alpha_\xi + \alpha_\xi\beta = 0, \end{cases} \tag{17}$$

とおけばよい。これらの結果から、我々の model space に拡張した Dirac 方程式は

$$\left(E + \alpha_i p_i + e^{\frac{\xi}{a}}(\beta m + \alpha_\xi p_\xi)\right)\varphi(\boldsymbol{r}\,t\,\xi) = 0, \tag{18}$$

となる。行列 $(\alpha_i, \beta, \alpha_\xi)$ の具体的な表示の一例をあげておこう。α_i と β は Schiff の教科書の表示と一致させてある。

$$\alpha_x = \left|\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|, \quad \alpha_y = \left|\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ \hline 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|, \alpha_z = \left|\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$
$$\beta = \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right|, \quad \alpha_\xi = \left|\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ \hline -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{array}\right|, \tag{19}$$

Eq.(18)で

$$E \to i\partial_t, \ p_i \to -i\partial_i \quad \text{および} \quad p_\xi \to -i\partial_\xi, \tag{20}$$

とおけば

$$(i\partial_t - i\alpha_i\partial_i + \beta e^{\frac{\xi}{a}} m - i\alpha_\xi e^{\frac{\xi}{a}}\partial_\xi)\varphi(\boldsymbol{r}\,t,\,\xi) = 0 \tag{21}$$

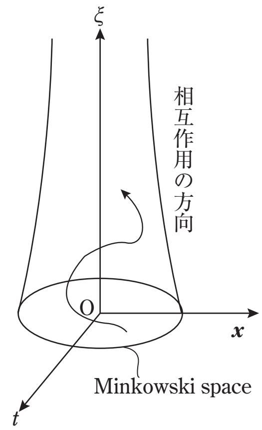
となる。Eq.(21)の解は

$$\varphi(\boldsymbol{r}\,t\,\xi) = u_j \exp(i(\boldsymbol{px} - \mathrm{E}t + p_\xi\xi)), \tag{22}$$

とおいて、Eq.(21)に代入すれば

$$(E + \alpha_i p_i + \beta e^{\frac{\xi}{a}} m + \alpha_\xi e^{\frac{\xi}{a}} p_\xi)u_j = 0, \tag{23}$$

となる。Eq.(19)の具体的な表示を使うと、Eq.(23)は



Model space

$$\begin{pmatrix} E + me^{\frac{\xi}{a}} & 0 & p_z + ie^{\frac{\xi}{a}}p_\xi, & p_x - ip_y \\ 0 & E + me^{\frac{\xi}{a}} & p_x + ip_y, & -p_z + ie^{\frac{\xi}{a}}p_\xi \\ p_z - ie^{\frac{\xi}{a}}p_\xi, & p_x - ip_y & E - me^{\frac{\xi}{a}} & 0 \\ p_x + ip_y, & -p_z - ie^{\frac{\xi}{a}}p_\xi & 0 & E - me^{\frac{\xi}{a}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = 0, \tag{24}$$

とかける。Eq.(24)の解は

$$
\begin{aligned}
&u_1=(-)\frac{p_z+ie^{\frac{\xi}{a}}p_\xi}{E_+ + me^{\frac{\xi}{a}}},\ u_2=(-)\frac{p_x+ip_y}{E_+ + me^{\frac{\xi}{a}}},\ u_3=1,\ u_4=0,\\
&u_1=(-)\frac{p_x-ip_y}{E_+ + me^{\frac{\xi}{a}}},\ u_2=\frac{p_z-ie^{\frac{\xi}{a}}p_\xi}{E_+ + me^{\frac{\xi}{a}}},\ u_3=0,\ u_4=1,\\
&u_1=1,\ u_2=0,\ u_3=\frac{p_z-ie^{\frac{\xi}{a}}p_\xi}{-E_- + me^{\frac{\xi}{a}}},\ u_4=\frac{p_x+ip_y}{-E_- + me^{\frac{\xi}{a}}},\\
&u_1=0,\ u_2=1,\ u_3=\frac{p_x-ip_y}{-E_- + me^{\frac{\xi}{a}}},\ u_4=(-)\frac{p_z+ie^{\frac{\xi}{a}}p_\xi}{-E_- + me^{\frac{\xi}{a}}},
\end{aligned}
\tag{25}
$$

であたえられる。ここで

$$E_\pm=\pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2+e^{\frac{2\xi}{a}}(m^2+p_\xi^2)}, \tag{26}$$

である。また、

$$
\begin{aligned}
&\det\left(E-(\alpha_i p_i+\beta me^{\frac{\xi}{a}}+\alpha_\xi e^{\frac{\xi}{a}}p_\xi)\right)\\
&=\left(E^2-(p_i^2+m^2e^{\frac{2\xi}{a}}+e^{\frac{2\xi}{a}}p_\xi^2)\right)^2\\
&=0
\end{aligned}
\tag{27}
$$

であることがわかる。ここで、

$$p_\xi=0,\quad \text{および}\quad a=\infty \tag{28}$$

とすると、Schiff の教科書における Dirac 方程式と一致する。このように、我々の導出した新しい Dirac 方程式は従来の理論における Dirac 方程式を含んでいることがわかる。

4. 電子の電荷の恒常的不変性

取り扱いを容易にするために、前章で述べた Dirac 方程式の形式を一般化しておこう。まず、時空座標 $(t\ x\ y\ z\ \xi)$ を (x^λ), $\lambda=0,1,2,3,4$, また、対応するエネルギー運動量 $(E\quad p_x\ p_y\ p_z\ p_\xi$ を (p_λ), $\lambda=0,1,2,3,4$, であらわすことにする。

我々の model space の metric tensor は

$$
(g_{\lambda\mu})=\begin{pmatrix}
e^{-\frac{2\xi}{a}} & & & & \\
 & -e^{-\frac{2\xi}{a}} & & & \\
 & & -e^{-\frac{2\xi}{a}} & & \\
 & & & -e^{-\frac{2\xi}{a}} & \\
 & & & & -1
\end{pmatrix}, \tag{29}
$$

および

$$(g^{\lambda\mu}) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\xi}{a}} & & & & \\ & -e^{\frac{2\xi}{a}} & & & \\ & & -e^{\frac{2\xi}{a}} & & \\ & & & -e^{\frac{2\xi}{a}} & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

である。また、(η_{ab}) および (η^{ab}) を

$$(\eta_{ab}) = (\eta^{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

で定義する。

注意することは、Eq.(29)と Eq.(30)とからわかるように、我々の model では反変成分による表示と共変成分による表示とで、物理空間が異なるのである。

次に、vector $\boldsymbol{v}$ の座標系 (x^a) における成分を (v^a)、また座標系 (x^λ) における成分を (v^λ) とする。また、(v^a) から (v^λ) への変換行列を (h^λ_a)、および、その逆行列を (h^a_λ) とすれば

$$v^\lambda = h^\lambda_a v^a \quad \text{および} \quad v^a = h^a_\lambda v^\lambda, \tag{32}$$

であり、また

$$h^\lambda_a h^a_\mu = \delta^\lambda_\mu \quad \text{および} \quad h^\lambda_a h^b_\lambda = \delta^a_b, \tag{33}$$

である。我々の model では、Eq.(13)は座標系によらない不変量であるから、新しい表示で

$$\begin{aligned} m^2 &= g^{\lambda\mu} p_\lambda p_\mu \\ &= \eta^{ab} p_a p_b, \end{aligned} \tag{34}$$

とかける。これより次の関係が出てくる。

$$g^{\lambda\mu} = h^\lambda_a h^\mu_b \eta^{ab} \quad \text{および} \quad g_{\lambda\mu} = h^a_\lambda h^b_\mu \eta_{ab}, \tag{35}$$

また、逆に

$$\eta^{ab} = h^a_\lambda h^b_\mu g^{\lambda\mu} \quad \text{および} \quad \eta_{ab} = h^\lambda_a h^\mu_b g_{\lambda\mu}, \tag{36}$$

である。

次に、γ 行列 (γ^a), $a = 0, 1, 2, 3, 4$ を以下のように定義する。

$$\gamma^0 = \beta,\ \gamma^1 = \beta\alpha_x,\ \gamma^2 = \beta\alpha_y,\ \gamma^3 = \beta\alpha_z \quad \text{および} \quad \gamma^4 = \beta\alpha_\xi \tag{37}$$

ここで、(γ^a) は Eq.(17)から

$$\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\eta^{ab} \tag{38}$$

を満たすことがわかる。Ep.(35)および Eq.(36)を用いると

$$\begin{aligned} \Lambda &\equiv g^{\lambda\mu} p_\lambda p_\mu - m^2 \\ &= \eta^{ab} h_a^\lambda h_b^\mu p_a p_b - m^2 \\ &= \eta^{ab} p_a p_b - m^2 \\ &= (\gamma^a p_a - m)(\gamma^a p_a + m), \end{aligned} \tag{39}$$

となる。但し、ここで

$$p_a = h_a^\lambda p_\lambda \tag{40}$$

である。Eq.(39)から我々の model space に拡張した自由電子の Dirac 方程式を

$$(\gamma^a p_a + m)\varphi = 0, \tag{41}$$

としよう。

次に、Eq.(41)に相互作用を入れることを考えよう。我々の model space における相互作用とは、座標変換 Eq.(40)の homogeneous Lorentz 変換による剰余空間として定義される。
すなわち (p_λ) の変化

$$(p_0 \quad \boldsymbol{p}) \to (p'_0,\ \boldsymbol{p}'), \tag{42}$$

に対して

$$\text{もし、} -p'^2_0 + \boldsymbol{p}'^2 = -p_0^2 + \boldsymbol{p}^2, \quad \text{したがって} \quad p'_\xi = p_\xi, \tag{43}$$

ならば、これは homogeneous Lorentz 変換であり、

$$\text{もし、} -p'^2_0 + \boldsymbol{p}'^2 \neq -p_0^2 + \boldsymbol{p}^2, \text{したがって} \quad p'_\xi \neq p_\xi, \tag{44}$$

ならば、この変換は我々の model space における相互作用をあらわす。これらの変換のもとでの spinor の変換行列を T とし、また ϕ を (x^λ) 系における spinor とすれば

$$\varphi = T\phi \tag{45}$$

とおける。Eq.(41)を (x^λ) 系にかきかえると

$$\begin{aligned} &(r^a p_a + m)\varphi \\ &= (r^a h_a^\lambda p_\lambda + m)\, T\phi \\ &= T(r^\lambda (p_\lambda + \Lambda_\lambda) + m)\phi \end{aligned} \tag{46}$$

となる。但し、ここで

$$\begin{cases} r^\lambda \equiv T^{-1} r^a T h_a^\lambda, \\ \Lambda_\lambda \equiv T^{-1}(p_\lambda T), \end{cases} \tag{47}$$

である。Eq.(35)、Eq.(36)および Eq.(38)より

$$\gamma^\lambda \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\lambda = 2g^{\lambda\mu} \tag{48}$$

となることがわかる。これらの結果から相互作用の入ったDirac方程式を

$$(\gamma^{\lambda}(p_{\lambda}+\Lambda_{\lambda})+m)\phi=0, \tag{49}$$

とおく。

次に、Eq.(41)はEq.(18)と一致することを示そう。$(g^{\lambda\mu})$ があたえられても (h_a^{λ}) にはLorentz変換だけの任意性があり、一意には決まらない。しかし、ここでは (h_a^{λ}) を固定して

$$(h_a^{\lambda})=\begin{pmatrix} e^{\frac{\xi}{a}} &&&& \\ & e^{\frac{\xi}{a}} &&& \\ && e^{\frac{\xi}{a}} && \\ &&& e^{\frac{\xi}{a}} & \\ &&&& 1 \end{pmatrix} \quad \text{したがって} \quad (h_{\lambda}^{a})=\begin{pmatrix} e^{-\frac{\xi}{a}} &&&& \\ & e^{-\frac{\xi}{a}} &&& \\ && e^{-\frac{\xi}{a}} && \\ &&& e^{-\frac{\xi}{a}} & \\ &&&& 1 \end{pmatrix}, \tag{50}$$

とおく。相互作用がなければ、ξ 方向の励起はないから

$$p_{\xi}\varphi=0 \tag{51}$$

である。このとき、Eq.(41)は

$$\left(\gamma^{0}p_{0}+\sum_{i=1}^{3}\gamma^{i}p_{i}+m\right)\varphi=0 \tag{52}$$

となる。これはEq.(37)を用いると通常のSchiffの教科書のDirac方程式であることがわかる。

相互作用があれば、我々のmodel spaceにおけるエネルギー運動量 (p_{λ}) はその値を変える。しかし、Eq.(50)の変換行列の形から (p_{λ}) には、(λ) に関する混ざりはないので、(p_{λ}) の値の増加量を (k_{λ}) とかけば、(p_{λ}) は、

$$(p_{a})\rightarrow(h_a^{\lambda}p_{\lambda})=(p_{a}+k_{a}) \tag{53}$$

と変化する。このとき、Eq.(49)は

$$\left(e^{-\frac{\xi}{a}}(\gamma_{0}(p_{0}+k_{0})+\sum_{i=1}^{3}\gamma_{i}(p_{i}+k_{i}))+\gamma_{\xi}(p_{\xi}+k_{\xi})+m\right)\phi=0, \tag{54}$$

となる。ここで注意しておくが、ここでは (p_{λ}) は演算子とはみなしていないので、Eq.(47)のSpinor接続 (Λ_{λ}) の項はあらわれない。このとき、Eq.(54)はEq.(18)とは形が一致していることがわかる。

次に、我々のmodelでは、電子の電荷密度は相互作用によって変わらないことを示そう。我々のmodel spaceにおける電荷密度と電流密度とを

$$j^{\lambda}=e\overline{\phi}\gamma^{\lambda}\phi,\ \ \lambda=0,1,2,3,4, \tag{55}$$

で定義する。但し、ここで

$$\overline{\phi}=\phi^{*}\gamma^{0}, \tag{56}$$

である。Eq.(50)で j^0 は電荷密度、 j^i, $i=1, 2, 3$ は電流密度であり、また、 $j^4(=j^\xi)$ は相互作用による電荷密度と電流密度の増加量をあらわす。(j^λ) は我々の model space における vector であるから、その vector の長さは座標変換によって不変であることは明らかであるが、ここでは、そのことを具体的に示そう。Eq.(55)、Eq.(47)、Eq.(35)および Eq.(45)を用いると

$$\begin{aligned} \|j\|_{int}^2 &= e^2 g_{\lambda\mu} j^\lambda j^\mu \\ &= e^2 g_{\lambda\mu}\left(\overline{\phi}\gamma^\lambda\phi\right)\left(\overline{\phi}\gamma^\mu\phi\right) \\ &= e^2 g_{\lambda\mu}\left(\overline{\varphi}TT^{-1}\gamma^a Th_a^\lambda T^{-1}\varphi\right) \\ &\qquad \times\left(\overline{\varphi}TT^{-1}\gamma^b Th_b^\mu T^{-1}\varphi\right) \\ &= e^2\eta_{ab}\left(\overline{\varphi}\gamma^a\varphi\right)\left(\overline{\varphi}\gamma^b\varphi\right) \\ &= \|j\|_{free}^2 \end{aligned} \tag{57}$$

となり、我々の model では電荷・電流密度の値は相互作用によって変わらないことがわかる。Eq.(57)で電流密度を

$$j^1 = j^2 = j^3 = 0 \tag{58}$$

とおけば（Eq.(12)と比較せよ）。

$$e^2\left|\varphi^*\varphi\right|^2 = e^2\left(\left|\phi^*\phi\right|^2 + \left|\phi^*\alpha_\xi\phi\right|^2\right), \tag{59}$$

であり、左辺は自由電子の電荷密度であり、また、右辺は相互作用のある場合の電荷密度である。これらのことから、我々の model における基礎理論では、電荷の値は相互作用によって、その大きさは変わらないことがわかる。しかし、注意しておくが、我々の model における相互作用は、完全には、全変換の homogeneous Lorentz 変換による不変部分空間にはなっていない。したがって、上述の条件 Eq.(58)は相互作用の変化に対して完全には保証されないであろう。相互作用が強くなると混じりが生ずると考えられる。

参考文献

1）J.Schwinger, Phys.Rev.74（1948）1948 ；75（1949）651、素粒子論、湯川秀樹、小林稔編（共立出版、昭和 26 年）

2）J.M.Jauch and F.Rohrlich, The Theory of Photons and Electrons. (Springer-Verlarg)

3）Grener Reinhart. QUANTUM ELECTRODYNAMICS.（springer）